塾技 98　整数の並び　～場合の数～

問題

2013 は 4 個の連続する数字 0，1，2，3 を並べ替えてできる数です。また，4213 も 4 個の連続する数字 1，2，3，4 を並べ替えてできる数です。このように，4 個の連続する数字を並べ替えてできる 4 桁の数について考えます。

（1）3 で割り切れるものは全部で何個ありますか。

（2）千の位，百の位，十の位の数を左から順に並べてできる 3 桁の数を 3 で割ったときの余りと，一の位の数を 3 で割ったときの余りが等しいものは全部で何個ありますか。

（灘中）

解答らん

（解答は次ページ）

解

(1) 塾技 98 **3** より，各位の数字の和が 3 の倍数となる連続した 4 個の数字の組を考えると，(0，1，2，3)，(3，4，5，6)，(6，7，8，9) の 3 組ある。このうち，0 を含む組からは，塾技 98 **2** より，$3\times3\times2\times1=18$(個)，0 を含まない組からは，塾技 98 **1** より，$4\times3\times2\times1=24$(個) の数ができるので，全部で，$18+24\times2=66$(個)　　答 **66 個**

(2) 一の位の数は 0 から 9 まで考えられるので，3 で割った余りは，0，1，2 のどれかとなる。一方，3 桁の数を 3 で割った余りが 0 となるのは各位の数字の和が 3 の倍数となるとき，3 で割った余りが 1 となるのは各位の数字の和が 3 の倍数より 1 大きくなるとき，3 で割った余りが 2 となるのは各位の数字の和が 3 の倍数より 2 大きくなるときである。これらのことを考え，一の位の数でそれぞれ場合分けして考えればよい。

① 一の位が 0 のとき（余りが 0 となるとき）

残りの 3 つの数字の組は (1，2，3) で，各位の数字の和は 3 の倍数となるので，これらの数字を並べ替えてできる数を 3 で割った余りは 0 となる。このような数は，$3\times2\times1=6$(個) ある。

② 一の位が 1 のとき（余りが 1 となるとき）

1 を含む連続した 4 つの数字の組は (0，1，2，3) 又は (1，2，3，4) で，1 以外の数字で 3 桁の数を作ったときの数字の組は (0，2，3) 又は (2，3，4) となる。(0，2，3) のとき，各位の数字の和は 5 で，それらを並べてできる 3 桁の数を 3 で割った余りは 2 となるので適さない。一方，(2，3，4) のときは，各位の数字の和は 3 の倍数となり，やはり適さない。

以下同様に簡略（かんりゃく）して考えていく。

③ 一の位が 2 のとき（余りが 2 となるとき）

(0，1，$\cancel{2}$，3) → 和 4×

(1，$\cancel{2}$，3，4) → 和 8（$3\times2\times1=6$ 個）

($\cancel{2}$，3，4，5) → 和 12×

④ 一の位が 3 のとき（余りが 0 となるとき）

(0，1，2，$\cancel{3}$) → 和 3（$2\times2\times1=4$ 個）

(1，2，$\cancel{3}$，4) → 和 7×

(2，$\cancel{3}$，4，5) → 和 11×

($\cancel{3}$，4，5，6) → 和 15（$3\times2\times1=6$ 個）

⑤ 一の位が 4 のとき（余りが 1 となるとき）

(1，2，3，$\cancel{4}$) → 和 6×

(2，3，$\cancel{4}$，5) → 和 10（$3\times2\times1=6$ 個）

(3，$\cancel{4}$，5，6) → 和 14×

($\cancel{4}$，5，6，7) → 和 18×

⑥ 一の位が 5 のとき（余りが 2 となるとき）

(2，3，4，$\cancel{5}$) → 和 9×

(3，4，$\cancel{5}$，6) → 和 13×

(4，$\cancel{5}$，6，7) → 和 17（$3\times2\times1=6$ 個）

($\cancel{5}$，6，7，8) → 和 21×

⑦ 一の位が 6 のとき（余りが 0 となるとき）

(3，4，5，$\cancel{6}$) → 和 12（$3\times2\times1=6$ 個）

(4，5，$\cancel{6}$，7) → 和 16×

(5，$\cancel{6}$，7，8) → 和 20×

($\cancel{6}$，7，8，9) → 和 24（$3\times2\times1=6$ 個）

⑧ 一の位が 7 のとき（余りが 1 となるとき）

(4，5，6，$\cancel{7}$) → 和 15×

(5，6，$\cancel{7}$，8) → 和 19（$3\times2\times1=6$ 個）

(6，$\cancel{7}$，8，9) → 和 23×

⑨ 一の位が 8 のとき（余りが 2 となるとき）

(5，6，7，$\cancel{8}$) → 和 18×

(6，7，$\cancel{8}$，9) → 和 22×

⑩ 一の位が 9 のとき（余りが 0 となるとき）

(6，7，8，$\cancel{9}$) → 和 21（$3\times2\times1=6$ 個）

①～⑩より，$6+6+4+6+6+6+6+6+6+6=4+6\times9=58$ (個)　　答 **58 個**