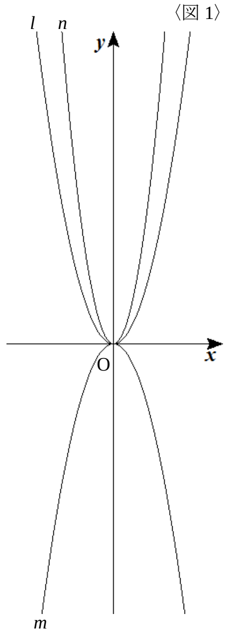
難 塾技 53　2 つの放物線

問題

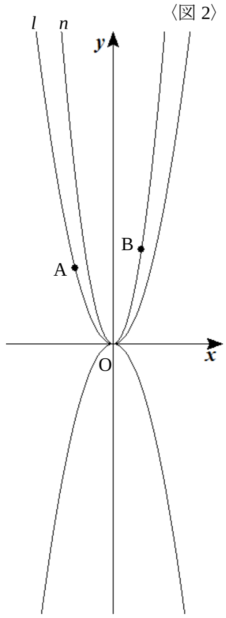
右の図 1 で, 点 O は原点, 曲線 l は関数 $y = x^2$ のグラフ, 曲線 m は関数 $y = -x^2$ のグラフ，曲線 n は関数 $y = ax^2$ のグラフを表している。ただし，$a > 1$ とする。原点から点(0，1)までの距離および，原点から点(1，0)までの距離をそれぞれ 1cm として，次の各問に答えよ。

［問 1］右の図 2 は，図 1 において，曲線 l 上にあり x 座標が -2 である点を A，曲線 n 上にあり x 座標が $\frac{3}{2}$ である点を B とした場合を表している。2 点 A, B を結んでできる線分 AB と y 軸との交点を考える。交点 y 座標が $\frac{32}{7}$ であるとき，a の値を求めよ。

〈図 1〉

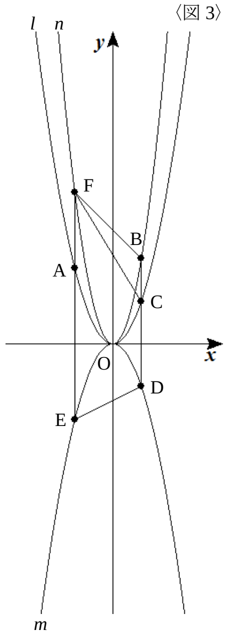


〈図 2〉



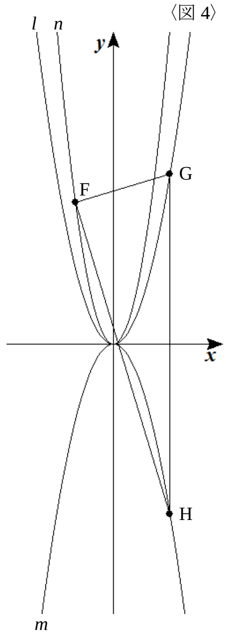
［問 2］右の図 3 は，図 2 において，曲線 l 上にあり x 座標が $\frac{3}{2}$ である点を C，曲線 m 上にあり x 座標が $\frac{3}{2}$ である点を D，曲線 m 上にあり x 座標が -2 である点を E，曲線 n 上にあり x 座標が -2 である点を F とし，点 F と点 B，点 F と点 C，点 F と点 E，点 B と点 D, 点 D と点 E をそれぞれ結んだ場合を表している。四角形 FEDC の面積と△FCB の面積の比が 22 : 3 となるとき，△FCB の面積は何 cm^2 か。

〈図 3〉



［問 3］右の図 4 は，図 1 において，曲線 l 上にあり x 座標が 3 である点を G，曲線 m 上にあり x 座標が 3 である点を H，曲線 n 上にあり x 座標が -2 である点を F とし，点 F と点 G，点 F と点 H，点 G と点 H をそれぞれ結んだ場合を表している。
$\angle GFH = 90^\circ$ となるとき，a の値を求めよ。ただし，解答欄には，答えだけでなく，答えを求める過程がわかるように，途中の式や計算なども書け。

〈図 4〉



（都立戸山高）

解答は次のページ

解

［問 1］AB と y 軸の交点の y 座標が $\frac{32}{7}$ より，直線 AB は，

AB : $y = kx + \frac{32}{7}$ （k は傾き）

とおける。これが A(－2，4)を通るので，(－2，4)を代入して，

$4 = -2k + \frac{32}{7}$　　$28 = -14k + 32$　　$k = \frac{2}{7}$

よって，直線 AB の式は，$y = \frac{2}{7}x + \frac{32}{7}$ と求まる。B($\frac{3}{2}$，$\frac{9}{4}a$)を代入して，

$\frac{9}{4}a = \frac{2}{7} \times \frac{3}{2} + \frac{32}{7}$　　$\frac{9}{4}a = 5$　　$\boldsymbol{a = \frac{20}{9}}$ 答

［問 2］各点の座標は右の図のようになる。

ここで四角形 FEDC は台形で，△FCB と高さが等しいので，

台形と三角形の面積比は，台形の上底と下底の和と

三角形の底辺との比に等しくなる。よって，

四角形FEDC : △FCB

$= (\mathrm{CD} + \mathrm{FE}) : \mathrm{BC}$

$= \left\{\frac{9}{4} - (-\frac{9}{4}) + 4a - (-4)\right\} : (\frac{9}{4}a - \frac{9}{4})$

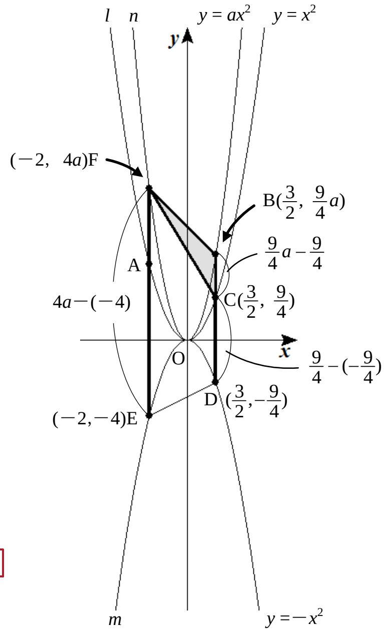
$= (\frac{17}{2} + 4a) : (\frac{9}{4}a - \frac{9}{4})$

これが 22 : 3 となるので，

$(\frac{17}{2} + 4a) : (\frac{9}{4}a - \frac{9}{4}) = 22 : 3$

$22(\frac{9}{4}a - \frac{9}{4}) = 3(\frac{17}{2} + 4a)$　これを解いて，$a = 2$

よって，$\triangle \mathrm{FCB} = (\frac{9}{4} \times 2 - \frac{9}{4}) \times \left\{\frac{3}{2} - (-2)\right\} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{63}{16}(\mathrm{cm}^2)}$ 答



［問 3］各点の座標は，G(3，9)，H(3,－9)，F(－2，4a)となる。

「塾技 15 **2**（ｉ）(2)」より，(GF の傾き) × (FH の傾き) =－1 となるとき，2 直線は垂直になり，∠GFH = 90°となる。

(GFの傾き)×(FHの傾き) = −1

$\frac{9-4a}{3-(-2)} \times \frac{-9-4a}{3-(-2)} = -1$

$\frac{9-4a}{5} \times \frac{-(9+4a)}{5} = -1$

$(9-4a)(9+4a) = 25$

$16a^2 = 56$

$a = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$　　$a > 0$ より，$\boldsymbol{a = \frac{\sqrt{14}}{2}}$ 答

別解

△GFH に三平方の定理を用いて，

$\mathrm{GF}^2 + \mathrm{FH}^2 = \mathrm{GH}^2$

$\{5^2 + (9-4a)^2\} + \{5^2 + (4a+9)^2\} = 18^2$　を解いてもよい。