

難 塾技 45 式の値①

問題 1

$x = 4 - 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3} - 1$ のとき, $x^2 + 4xy + 5y^2 + 2y + 1$ の値を求めよ。 (東大寺学園高)

問題 2

$x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ のとき, $(x^2 + 2xy + y^2)^3 + (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})^2$ の値は である。 (函館ラ・サール高)

問題 3

$x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 2 + \sqrt{3}$, $z = 4 + \sqrt{6}$ のとき, 式 $xyz - 4xy - yz - 2zx + 8x + 4y + 2z - 8$ の値は である。 (灘高)

解 1

「塾技 45 (2)」より, まずは求値式を因数分解してから代入する。

$$\begin{aligned}
 & x^2 + 4xy + 5y^2 + 2y + 1 && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5y^2 = 4y^2 + y^2 \text{ と考え, } 6 \text{ 項式に式変形する} \\ \text{「塾技 37 2 解法 3」の利用} \\ x, y \text{ の値をそれぞれ代入} \end{array} \\
 & = x^2 + 4xy + 4y^2 + y^2 + 2y + 1 \\
 & = (x + 2y)^2 + (y + 1)^2 \\
 & = (4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2)^2 + (\sqrt{3} - 1 + 1)^2 \\
 & = 2^2 + (\sqrt{3})^2 = 7 \quad \text{◀ 答}
 \end{aligned}$$

解 2

求値式は対称式 (塾技 45 例題補足) である。「塾技 45 (3)」より,

$$\begin{aligned}
 & (x^2 + 2xy + y^2)^3 + (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})^2 && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{求値式を } x + y, xy \text{ のみの形に式変形} \\ x + y = 2\sqrt{3}, xy = 1 \text{ をそれぞれ代入} \end{array} \\
 & = \{(x + y)^2\}^3 + (\frac{x + y}{xy})^2 \\
 & = \{(2\sqrt{3})^2\}^3 + (\frac{2\sqrt{3}}{1})^2 \\
 & = 12^3 + 12 = 1740 \quad \text{◀ 答}
 \end{aligned}$$

解 3

「塾技 45 (2)」より, まずは求値式を因数分解してから代入する。

$$\begin{aligned}
 & xyz - 4xy - yz - 2zx + 8x + 4y + 2z - 8 && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{項の組み合わせ (塾技 35 手順④参照) を行う} \\ \text{部分的に因数分解をして共通因数を作り出す} \\ \text{共通因数 } z - 4 \text{ をくくり出す} \\ \text{「塾技 36 解法 1」の因数分解を利用} \\ x, y, z \text{ の値をそれぞれ代入} \end{array} \\
 & = \frac{xyz - 4xy}{2 \text{ 項}} - \frac{yz + 4y}{2 \text{ 項}} - \frac{2zx + 8x}{2 \text{ 項}} + \frac{2z - 8}{2 \text{ 項}} \\
 & = xy(z - 4) - y(z - 4) - 2x(z - 4) + 2(z - 4) \\
 & = (z - 4)(xy - y - 2x + 2) \\
 & = (z - 4)(x - 1)(y - 2) \\
 & = (4 + \sqrt{6} - 4)(1 + \sqrt{2} - 1)(2 + \sqrt{3} - 2) \\
 & = \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 6 \quad \text{◀ 答}
 \end{aligned}$$