

塾技 79 約数 ～数の性質～

問題

50 個の電球に 1～50 までの番号がつけられています。それぞれの電球にはボタンがあり、それを 1 回押すと、ついている電球は消え、消えている電球はつきます。はじめにすべての電球が消えていて、次の規則で 50 回の操作を行います。

- (1 回目) 番号が 1 の倍数である電球のボタンを押す。
- (2 回目) 番号が 2 の倍数である電球のボタンを押す。
- (3 回目) 番号が 3 の倍数である電球のボタンを押す。

⋮

- (50 回目) 番号が 50 の倍数である電球のボタンを押す。

すべての操作が終わったとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 番号 1～10 の電球それぞれについて、電球がついていれば○、消えていれば×を右の表にかきなさい。

番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
電球										

- (2) 番号 1～50 の電球の中で、ついている電球の個数はいくつですか。また、その電球の番号はどんな数かを述べなさい。
- (3) 番号 1～50 の電球の中で、4 回ボタンが押された電球の個数はいくつですか。

(駒場東邦中) ©

解答らん

(解答は次ページ)

解

- (1) 番号1 1回目○
番号2 1回目○ → 2回目×
番号3 1回目○ → 3回目×
番号4 1回目○ → 2回目× → 4回目○
番号5 1回目○ → 5回目×
番号6 1回目○ → 2回目× → 3回目○ → 6回目×
番号7 1回目○ → 7回目×
番号8 1回目○ → 2回目× → 4回目○ → 8回目×
番号9 1回目○ → 3回目× → 9回目○
番号10 1回目○ → 2回目× → 5回目○ → 10回目×

答

番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
電球	○	×	×	○	×	×	×	×	○	×

(2) (1)の結果より、番号の数字の約数の個数が奇数個の場合はついており、約数の個数が偶数個の場合は消えていることがわかる。

1以外の数で、約数の個数が奇数個となる数は、**熟技79** 2より、素因数分解すると同じ素数が偶数個の積、又は、異なる偶数個の素数どうしの積*となる。

よって、1~50の中に、約数の個数が奇数個となる数は、1と、 $2 \times 2 = 4$ 、 $3 \times 3 = 9$ 、 $5 \times 5 = 25$ 、 $7 \times 7 = 49$ 、 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 、 $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ の合計7個ある。

答 7個、約数の個数が奇数個の数

(他に、同じ整数を2回かけてできる数や、平方数など)

※の説明

例えば、 $\bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc$ (\bigcirc は同じ素数)の約数の個数は、 $4 + 1 = 5$ 個となり、 $\bigcirc \times \bigcirc \times \square \times \square \times \square \times \square$ (\bigcirc と \square は異なる素数)の約数の個数は、 $(2 + 1) \times (4 + 1) = 15$ 個となる。このように、約数の個数が奇数個となる数は、必ず平方数(整数90を参照)となり、(2)は、 $1 \times 1 = 1$ 、 $2 \times 2 = 4$ 、 $3 \times 3 = 9$ 、 $4 \times 4 = 16$ 、 $5 \times 5 = 25$ 、 $6 \times 6 = 36$ 、 $7 \times 7 = 49$ の合計7個と解くこともできる。

(3) 約数の個数が4個となる数の個数を求めればよい。

約数の個数が4個の数を素因数分解すると、**熟技79** 2より、

(i) $\bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc$ (\bigcirc は素数)又は(ii) $\bigcirc \times \square$ (\bigcirc と \square はそれぞれ異なる素数)となる。1~50の中で、(i)を満たすのは、 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 、 $3 \times 3 \times 3 = 27$ の2個で、

(ii)を満たすのは、 $2 \times 3 = 6$ 、 $2 \times 5 = 10$ 、 $2 \times 7 = 14$ 、 $2 \times 11 = 22$ 、 $2 \times 13 = 26$ 、 $2 \times 17 = 34$ 、 $2 \times 19 = 38$ 、 $2 \times 23 = 46$ 、 $3 \times 5 = 15$ 、 $3 \times 7 = 21$ 、 $3 \times 11 = 33$ 、 $3 \times 13 = 39$ 、 $5 \times 7 = 35$ の13個あるので、合計15個ある。

答 15個