

熟技 77 最短距離・反射 ～相似～

問題

図1は、 $AB = AD = 6\text{cm}$ 、 $AE = 12\text{cm}$ の直方体です。点Pは辺DH上を、点Qは辺CG上を、点Rは辺BF上を動きます。次の問いに答えなさい。ただし、三角すいの体積は、 $(\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3}$ で求めることができます。

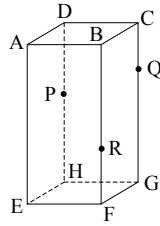


図1

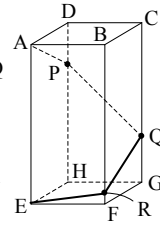


図2

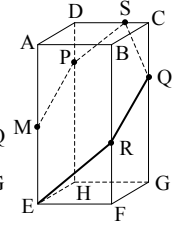


図3

- (1) 図2のように、 $A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow E$ と

線で結びます。この線の長さが最も短くなるを考えます。

- ① PH, QG, RFの長さはそれぞれ何cmですか。
- ② 3点P, Q, Rを通る平面でこの立体を切断したとき、Bを含む立体の体積は何 cm^3 ですか。

- (2) 点Sは辺CD上を動きます。辺AEの真ん中の点をMとしたとき、図3のように、 $M \rightarrow P \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow E$ と線で結びます。この線の長さが最も短くなるを考えます。

- ① CSの長さは何cmですか。
- ② 3点P, Q, Rを通る平面でこの立体を切断したとき、Bを含む立体の体積は何 cm^3 ですか。

(高輪中) C

解答らん

解

(1) ① 結んだ線の長さが最も短くなる作図は、**熟技 77** 1 より、線が通る部分の展開図をかき、展開図上で直線にすればよい。

右の図で、三角形 E'PH と三角形 E'AE は相似となるので、

$$PH : AE = E'H : E'E$$

$$PH : 12 = 3 : 4 \quad PH = 12 \times 3 \div 4 = 9(\text{cm})$$

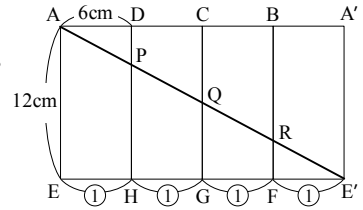
同様に、三角形 E'QG と三角形 E'AE は相似となるので、

$$QG : AE = E'G : E'E \quad QG : 12 = 2 : 4 \quad QG = 12 \times 2 \div 4 = 6(\text{cm})$$

さらに、三角形 E'RF と三角形 E'AE は相似となるので、

$$RF : AE = E'F : E'E \quad RF : 12 = 1 : 4 \quad RF = 12 \times 1 \div 4 = 3(\text{cm})$$

答 PH = 9cm, QG = 6cm, RF = 3cm

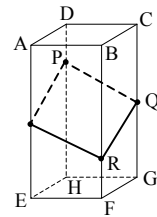


② 切り口は右の図のようになる。**熟技 50** 2 より、求める体積は、

$$\text{正方形 } ABCD \times (BR + DP) \div 2$$

$$= 6 \times 6 \times (9 + 3) \div 2 = 216(\text{cm}^3)$$

答 216cm³



(2) ① 右の図のように点 M と、A に関して対称な点 M' をとると、

$$MP + PS + SQ + QR + RE'$$

$$= M'S + SQ + QR + RE' = M'E'$$

と折れ線は一直線となるので、最も短くなる。

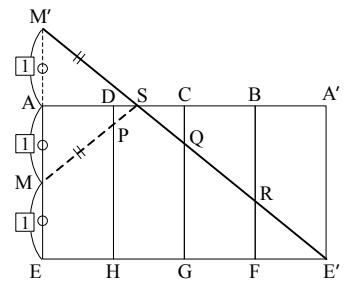
三角形 M'AS と三角形 M'EE' は相似となるので、

$$AS : EE' = M'A : M'E$$

$$AS : 24 = 1 : 3 \quad AS = 24 \times 1 \div 3 = 8(\text{cm})$$

よって、CS = AC - AS = 12 - 8 = 4(cm)

答 4cm



② 三角形 SDP と三角形 SAM は相似となるので、

$$DP : AM = SD : AS \quad DP : 6 = 2 : 8 \quad DP = 1.5(\text{cm})$$

三角形 SBR と三角形 SA'E' は相似となるので、

$$BR : A'E' = SB : SA' \quad BR : 12 = 10 : 16 \quad BR = 7.5(\text{cm})$$

切り口は右の図となるので、**熟技 50** 2 より、求める体積は、

$$\text{正方形 } ABCD \times (BR + DP) \div 2$$

$$= 6 \times 6 \times (7.5 + 1.5) \div 2 = 162(\text{cm}^3)$$

答 162cm³

