難 塾技 96　約数の個数・総和

問題 1

正の約数の個数が 21 個となる自然数 n のうち，最小の n を求めよ。　（慶應志木高）

問題 2

正の整数 n の約数は 4 個であり，それら 4 個の約数の和は 84 である。正の整数 n を求めよ。

（慶應女子高）

解 1

「塾技 96 **1**」より，正の約数の個数が 21 個となる自然数を素因数分解したときの形は，

(ⅰ) a^{20} → 約数の個数 $= (20 + 1) = 21$ 個

(ⅱ) b^2c^6 → 約数の個数 $= (2 + 1) \times (6 + 1) = 21$ 個

（a，b，c はそれぞれ素数）

のうちのどちらかになる。n を最小にするには，(ⅰ)では $a = 2$，(ⅱ)では $b = 3$，$c = 2$，すなわち

(ⅰ) 2^{20}　(ⅱ) $3^2 \times 2^6$　のどちらかの場合とわかる。

$2^{20} > 3^2 \times 2^6$ より，(求める自然数 n) $= 3^2 \times 2^6 =$ **576**　答

解 2

「塾技 96 **1**」より，正の約数の個数が 4 個となる正の整数を素因数分解したときの形は，

(ⅰ) a^3 又は (ⅱ) b^1c^1 の形のどちらかになる。ここで「塾技 96 **2**」より，

(a^3 の約数の総和) $= 1 + a^1 + a^2 + a^3$　…①

①で，$a = 2$ のとき① $= 15$，$a = 3$ のとき① $= 40$，$a = 5$ のとき① $= 156$ となり，題意を満たさない。

一方，b^1c^1 の約数の総和は，「塾技 96 **2**」より，

(b^1c^1 の約数の総和) $= (1 + b^1)(1 + c^1) = (1 + b)(1 + c)$　…②

② $= 84$ となるような $1 + b$ と $1 + c$ の値の組み合わせは，

$(1 + b,\ 1 + c) = (1,\ 84),\ (2,\ 42),\ (3,\ 28),\ (4,\ 21),\ (6,\ 14),\ (7,\ 12)$

このうち，b，c が素数となるのは，$1 + b = 6$，$1 + c = 14$ すなわち $b = 5$，$c = 13$ のときとなる。

以上より，求める正の整数 n は

$n = bc = 5 \times 13 =$ **65**　答