難 塾技 94　最大公約数・最小公倍数

問題 1

和が 77 である 2 つの自然数 A, B があって，A, B の最小公倍数は最大公約数の 24 倍であるという。$A < B$ として A, B を求めよ。

（慶應義塾志木高）

問題 2

2 つの自然数 a, b の最大公約数を g，最小公倍数を l とすると，

$$a^2 + b^2 + g^2 + l^2 = 1300$$

が成立する。ただし，$a > b$ とする。

（1）$g > 1$ のとき a, b を求めよ。

（2）$g = 1$ のとき a, b を求めよ。　（開成高）

解 1　A, B の最大公約数を G，最小公倍数を L とすると，「塾技 94」より，

$$\begin{array}{r|cc} G & A & B \\ \hline & a & b \end{array} \longrightarrow$$

$L = Gab, \ A = Ga, \ B = Gb$（$a, b$ は互いに素，$a < b$）がそれぞれ成り立つ。

$A + B = Ga + Gb = 77$ より，$G(a + b) = 77$ …①　　$L = Gab = 24G$ より，$ab = 24$ …②

a, b は互いに素および $a < b$ より，②を満たす(a, b)の組は，

$(a, b) = (1, 24), (3, 8)$ → $a + b = 25, 11$

ここで，①より，$a + b$ は 77 の約数となるので，$a + b = 11$，$(a, b) = (3, 8)$となる。

①に $a + b = 11$ を代入して，$11G = 77$　$G = 7$

以上より，$A = Ga = 7 \times 3 = 21$，$B = Gb = 7 \times 8 = 56$　　答 **$A = 21$，$B = 56$**

解 2

（1）$a = gA$，$b = gB$（A, B は互いに素，$A > B$）とおくと，$l = gAB$ とおける。

$$a^2 + b^2 + g^2 + l^2 = 1300$$
$$(gA)^2 + (gB)^2 + g^2 + (gAB)^2 = 1300$$
$$g^2A^2 + g^2B^2 + g^2 + g^2A^2B^2 = 1300$$
$$g^2(A^2 + B^2 + 1 + A^2B^2) = 1300$$
$$g^2(A^2 + 1)(B^2 + 1) = 1300 = 2^2 \times 5^2 \times 13 = 10^2 \times 13$$

$g > 1$ より，$g = 2$ 又は 5 又は 10 とわかる。

（ⅰ）$g = 2$ のとき

$(A^2 + 1)(B^2 + 1) = 5^2 \times 13 = (5 \times 13) \times 5 = 65 \times 5$　$A^2 + 1$ 及び $B^2 + 1$ は平方数とはならないので，$A^2 + 1 = 65$，$B^2 + 1 = 5$ より $A = 8$，$B = 2$ となり，A, B は互いに素を満たさない。

（ⅱ）$g = 5$ のとき

$(A^2 + 1)(B^2 + 1) = 2^2 \times 13 = (2 \times 13) \times 2 = 26 \times 2$　$A^2 + 1$ 及び $B^2 + 1$ は平方数とはならないので，$A^2 + 1 = 26$，$B^2 + 1 = 2$ より $A = 5$，$B = 1$　$a = gA = 5 \times 5 = 25$，$b = gB = 5 \times 1 = 5$

（ⅲ）$g = 10$ のとき，$(A^2 + 1)(B^2 + 1) = 13$ → これを満たす自然数 A, B はない。

（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）より，**$a = 25$，$b = 5$**　答

（2）$g = 1$ のとき，$a = A$，$b = B$ より，$g^2(A^2 + 1)(B^2 + 1) = (a^2 + 1)(b^2 + 1) = 1300$　$a^2 + 1$ 及び $b^2 + 1$ は平方数とはならないので，これを満たす $a^2 + 1, b^2 + 1$ の組は，積が 1300 となる因数の組を考え，

$$1300 = (2 \times 5^2) \times (2 \times 13) = (5 \times 13) \times (2^2 \times 5) = (2 \times 5 \times 13) \times (2 \times 5) = (2^2 \times 5 \times 13) \times 5 = (2 \times 5^2 \times 13) \times 2$$

より，$(a^2 + 1, b^2 + 1) = (50, 26), (65, 20), (130, 10), (260, 5), (650, 2)$。このうち，$a, b$ が自然数を満たすのは，$a^2 + 1 = 50$，$b^2 + 1 = 26$ のときのみで，**$a = 7$，$b = 5$**　答