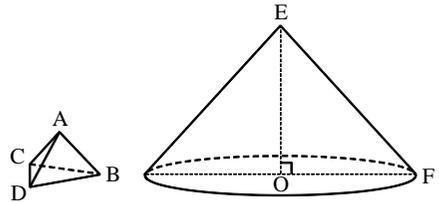


難 塾技 86 立体の切断 (4)

問題

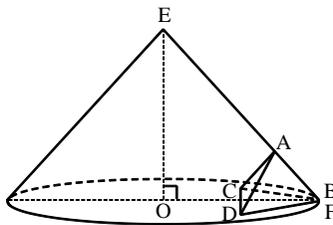
図1のように、1辺の長さが $2\sqrt{3}\text{cm}$ の正四面体 $ABCD$ と、底面の半径が 6cm の円錐がある。図2のように、正四面体を $CD \perp OB$ となるように円錐の底面上に置き、点 B を F に重ねたところ、辺 AB と母線 EF がちょうど重なった。円周率を π として、次の各問いに答えよ。



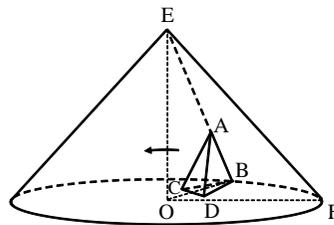
〈図1〉

- (1) 円錐の高さを求めよ。
- (2) 図3のように、 $CD \perp OB$ を保ちながら、正四面体の頂点 B が円 O の周上を1周するとき、
 - ① $\triangle BCD$ が通った部分の面積を求めよ。
 - ② 正四面体 $ABCD$ が通った部分の体積を求めよ。

(早稲田実業高)



〈図2〉



〈図3〉

----- 解答は次のページ -----

解

(1) 正四面体の頂点 A から底面に垂線 AH を下ろすと、
「塾技 80 (1)」より、

$$AH = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{2}$$

また、「塾技 79」より H は底面の正三角形 BCD の重心と一致するので、CD の中点を M とすると「塾技 59 3 (1)」より、

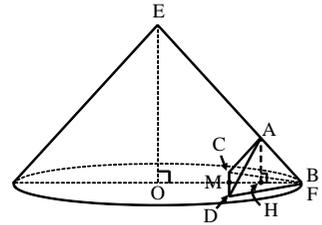
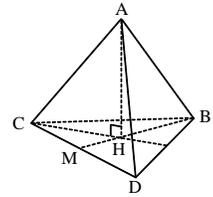
$$BH : HM = 2 : 1 \rightarrow BH = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

ここで、右の図において、 $\triangle ABH \sim \triangle EBO$ より、

$$AH : EO = BH : BO$$

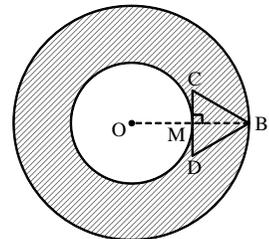
$$2\sqrt{2} : EO = 2 : 6$$

$$EO = 6\sqrt{2}(\text{cm}) \quad \text{答}$$



(2) ① 求める面積は、右の図の斜線部分となるので、

$$\begin{aligned} & (\text{半径 } OB \text{ の円の面積}) - (\text{半径 } OM \text{ の円の面積}) \\ &= 6^2\pi - (6-3)^2\pi \\ &= 27\pi(\text{cm}^2) \quad \text{答} \end{aligned}$$



② A から EO に引いた垂線の足を P とすると、求める立体の体積は、
PA および OB を半径とする円錐台から、PA および OM を半径とする円錐台を引いたものとなる。

「塾技 86 2」より、PA、OM を半径とする円錐台の体積は、
右の図のように EO の延長線と AM の延長線との交点を Q とし、
円錐を復元して考えればよい。

まず、PA および OB を半径とする円錐台の体積を考える。

$\triangle EPA \sim \triangle EOB$ より相似比は、

$$\begin{aligned} EP : EO &= (EO - AH) : EO \\ &= 4\sqrt{2} : 6\sqrt{2} \\ &= 2 : 3 \rightarrow PA = \frac{2}{3}OB = 4 \end{aligned}$$

よって、PA、OB を半径とする円錐台の体積は、

$$6^2\pi \times 6\sqrt{2} \times \frac{1}{3} - 4^2\pi \times 4\sqrt{2} \times \frac{1}{3} = \frac{152\sqrt{2}}{3}\pi$$

次に、PA および OM を半径とする円錐台の体積を考える。

$\triangle QOM \sim \triangle QPA$ より、相似比は、

$$QO : QP = OM : PA = 3 : 4 \rightarrow QO : OP = 3 : 1$$

$OP = AH = 2\sqrt{2}$ より、 $QO = 3OP = 6\sqrt{2}$

よって、PA、OM を半径とする円錐台の体積は、

$$4^2\pi \times 8\sqrt{2} \times \frac{1}{3} - 3^2\pi \times 6\sqrt{2} \times \frac{1}{3} = \frac{74\sqrt{2}}{3}\pi$$

以上より、求める体積 $= \frac{152\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{74\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{78\sqrt{2}}{3}\pi = 26\sqrt{2}\pi(\text{cm}^3) \quad \text{答}$

