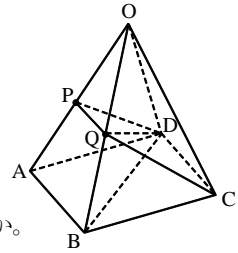


問題

右の図の立体 O-ABCD は、底面が 1 辺 8cm の正方形 ABCD で、
 OA = OB = OC = OD = 12cm の四角錐である。いま、辺 OA 上に点 P、
 辺 OB 上に点 Q を OP = OQ = xcm となるようにとる。4 点 P, Q, C, D
 を通る平面で四角錐 O-ABCD を切るとき、次の各問いに答えよ。



- (1) 四角錐 O-ABCD の体積を求めよ。
- (2) $x = 6$ のとき、① 立体 C-OQD の体積は四角錐 O-ABCD の体積の何倍か。
 ② 立体 O-PQCD の体積を求めよ。
- (3) 立体 O-PQCD の体積が、四角錐 O-ABCD の体積の $\frac{1}{8}$ 倍になるとき、 x の値を求めよ。

(早稲田実業高)

解

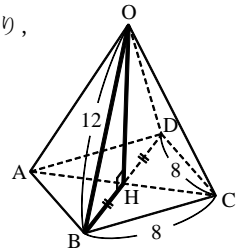
- (1) 右の図のように、頂点 O から底面に垂線 OH を下ろすと、「塾技 79」より、
 OH は底面の正方形 ABCD の対角線の交点と一致するので、

$$BD = \sqrt{2}BC = 8\sqrt{2}, \quad BH = \frac{1}{2}BD = 4\sqrt{2}$$

$\triangle OBH$ に三平方の定理を用いて、

$$OH = \sqrt{12^2 - (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{7}$$

$$\text{四角錐 O-ABCD} = 8 \times 8 \times 4\sqrt{7} \times \frac{1}{3} = \frac{256\sqrt{7}}{3} (\text{cm}^3) \quad \leftarrow \text{答}$$



(2)

- ① 立体 C-OQD を三角錐 O-QCD と考えると、「塾技 85」より、

$$\begin{aligned} & [\text{三角錐 O-QCD}] \\ &= [\text{三角錐 O-BCD}] \times \frac{OQ}{OB} \times \frac{OC}{OC} \times \frac{OD}{OD} \\ &= \frac{1}{2} [\text{四角錐 O-ABCD}] \times \frac{6}{12} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{4} [\text{四角錐 O-ABCD}] \quad \leftarrow \text{答} \quad \frac{1}{4} \text{倍} \end{aligned}$$

- ② ①と同様に考え、「塾技 85」より、

$$\begin{aligned} & [\text{三角錐 O-PQD}] \\ &= [\text{三角錐 O-ABD}] \times \frac{OP}{OA} \times \frac{OQ}{OB} \times \frac{OD}{OD} \\ &= \frac{1}{2} [\text{四角錐 O-ABCD}] \times \frac{6}{12} \times \frac{6}{12} \times \frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{8} [\text{四角錐 O-ABCD}] \end{aligned}$$

よって、求める立体 O-PQCD の体積は、

四角錐 O-ABCD の $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ 倍とわかるので、

$$\text{立体 O-PQCD} = \frac{3}{8} \times \frac{256\sqrt{7}}{3} = 32\sqrt{7} (\text{cm}^3) \quad \leftarrow \text{答}$$

- (3) 立体 O-PQCD を、三角錐 O-QCD と三角錐 O-PQD に分けて考えればよい。「塾技 85」より、

$$\begin{aligned} [\text{立体 O-PQCD}] &= \frac{1}{2} [\text{四角錐 O-ABCD}] \times \frac{OQ}{OB} \times \frac{OC}{OC} \times \frac{OD}{OD} + \frac{1}{2} [\text{四角錐 O-ABCD}] \times \frac{OP}{OA} \times \frac{OQ}{OB} \times \frac{OD}{OD} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{12} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} + \frac{x}{12} \times \frac{x}{12} \times \frac{1}{1} \right) \times [\text{四角錐 O-ABCD}] \end{aligned}$$

題意より、 $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{12} + \frac{x^2}{144} \right) = \frac{1}{8}$ となればよい。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{12} + \frac{x^2}{144} \right) &= \frac{1}{8} \\ 4 \left(\frac{x}{12} + \frac{x^2}{144} \right) &= 1 \quad \leftarrow \text{両辺を 8 倍} \\ \frac{x}{3} + \frac{x^2}{36} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 12x - 36 &= 0 \\ x &= \frac{-12 \pm 12\sqrt{2}}{2} \\ &= -6 \pm 6\sqrt{2} \\ 0 < x < 12 \text{ より、} & \quad \leftarrow \text{答} \quad x = -6 + 6\sqrt{2} \end{aligned}$$