難 塾技 66　円と相似

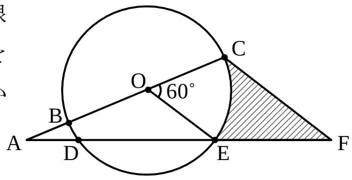
問題

半径が 2cm の円 O がある。円 O の外の点 A から中心 O を通る直線をひき，円 O との交点を B，C とする。また，点 A から中心 O を通らない直線を引き，円 O との交点を D，E とする。さらに点 C から OE に平行な直線をひき，直線 AE との交点を F とする。

$\angle COE = 60^\circ$，CF = 3cm であるとき，次の各問いに答えなさい。

（1）AE の長さを求めなさい。　（2）DE の長さを求めなさい。

（3）斜線部分の面積を求めなさい。　（東京学芸大附高）



解

（1）OE // CF より，△AOE∽△ACF となるので，

AO : AC = OE : CF

= 2 : 3

よって，AO : OC = 2 : 1 とわかる。OC = 2 より，AO = 4

ここで，E から OC に垂線 EH を下ろすと，△OEH は，

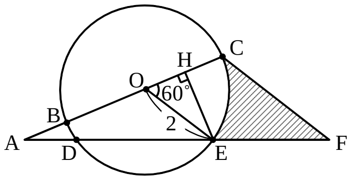
30°，60°，90° の直角三角形となるので，OE = 2 より，

$$EH = \frac{\sqrt{3}}{2}OE = \sqrt{3}，\ OH = \frac{1}{2}OE = 1$$

△AEH に三平方の定理を用いて，

$$AE = \sqrt{EH^2 + AH^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (4+1)^2} = \mathbf{2\sqrt{7}\,(cm)}$$ 答



（2）（1）より，AB = AO − BO = 4 − 2 = 2

DE = x とおくと，「塾技 66（図 2）」の方べきの定理より，

$$AB \times AC = AD \times AE$$

$$2 \times (2+4) = (2\sqrt{7} - x) \times 2\sqrt{7}$$

$$12 = 28 - 2\sqrt{7}x$$

$$2\sqrt{7}x = 16$$

これを解いて，$x = \mathbf{\frac{8\sqrt{7}}{7}\,(cm)}$ 答

（3）斜線部分の面積 = 台形 OEFC − おうぎ形 OEC

ここで台形の高さは，C から OE に垂線 CI を下ろすと，

△OCI は 30°，60°，90° の直角三角形となるので，

$$CI = \frac{\sqrt{3}}{2}CO = \sqrt{3}$$

以上より，求める面積は，

$$(2+3) \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} - 2 \times 2 \times \pi \times \frac{60}{360}$$

$$= \mathbf{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}\pi\right)\ cm^2}$$ 答