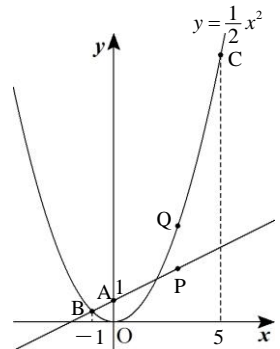


問題

右の図のように、点  $A(0, 1)$  と関数  $y = \frac{1}{2}x^2 \cdots \textcircled{1}$  のグラフがある。  
 $\textcircled{1}$  のグラフ上の 2 点  $B, C$  の  $x$  座標はそれぞれ  $-1, 5$  である。また、点  $P$  は直線  $AB$  上に、点  $Q$  は  $\textcircled{1}$  のグラフ上にある。次の問いに答えなさい。



- (1)  $P, Q$  の  $x$  座標がともに  $t$  であり、 $P$  の  $y$  座標が  $Q$  の  $y$  座標よりも小さいとき、線分  $PQ$  の長さを  $t$  の式で表しなさい。
- (2)  $\triangle OBP$  の面積が  $\triangle OAB$  と  $\triangle OAC$  の面積の和に等しいとき、 $P$  の座標として考えられるものをすべて求めなさい。
- (3)  $\triangle OBQ$  の面積が  $\triangle OAB$  と  $\triangle OAC$  の面積の和に等しいとき、 $Q$  の座標として考えられるものをすべて求めなさい。

(筑波大附駒場高)

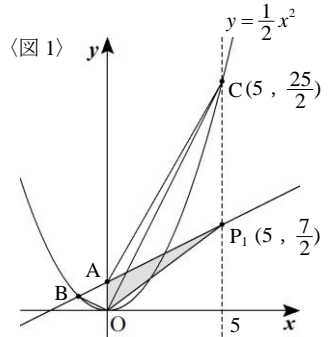
解

(1)  $A(0, 1), B(-1, \frac{1}{2})$  より、直線  $AB$  は  $y = \frac{1}{2}x + 1$  とわかる。点  $P$  は直線  $AB$  上の点なので、  
 $P(t, \frac{1}{2}t + 1)$ 、点  $Q$  は放物線上の点なので、 $Q(t, \frac{1}{2}t^2)$  とそれぞれ表すことができる。よって、  
 線分  $PQ = \frac{1}{2}t^2 - (\frac{1}{2}t + 1) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - 1$     **答**  $\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - 1$

(2) ( $P$  の  $x$  座標)  $> 0$  のとき、求める点  $P$  を  $P_1$  とすると、

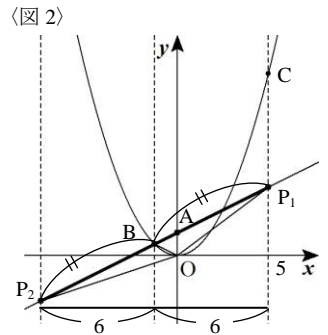
$$\triangle OBP_1 = \triangle OAB + \triangle OAP_1$$

これが、 $\triangle OAB$  と  $\triangle OAC$  の面積の和に等しくなるためには、  
 $\triangle OAB$  をともに持つので、 $\triangle OAP_1 = \triangle OAC$  となるような点  $P_1$  を求めればよい。よって、「塾技 19 (2)」より、図 1 のように等積変形すると、 $P_1(5, \frac{7}{2})$  と求まる。



一方、( $P$  の  $x$  座標)  $< 0$  のとき、求める点  $P$  を  $P_2$  とすると、  
 $\triangle OBP_1 = \triangle OBP_2$  となるような点  $P_2$  を求めればよいので、  
 図 2 のように等積変形すると、 $P_2$  は、 $P_1$  を点  $B$  について対称移動させた点とわかる。 $P_2$  の  $x$  座標  $= -1 - 6 = -7$  より、

$$P_2(-7, -\frac{5}{2}) \quad \text{答} \quad (5, \frac{7}{2}), (-7, -\frac{5}{2})$$



(3) (2) より、 $\triangle OBP_1 = \triangle OAB + \triangle OAC$  となるので、求める点  $Q$  は  $\triangle OBQ = \triangle OBP_1$  となるような点となる。「塾技 19 (2)」より、 $P_1$  を通り、直線  $OB$  と平行な直線と  $\textcircled{1}$  との交点が  $Q$  となる。よって、

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{代入法}} \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x + 6 \quad (x+4)(x-3) = 0 \text{ より, } x = -4, 3$$

**答**  $(-4, 8), (3, \frac{9}{2})$