

問題

袋の中に赤玉、青玉、黄玉が全部合わせて 17 個入っている。この袋の中をよくかき混ぜて、玉を同時に 3 個取り出すとき、赤玉、青玉、黄玉が 1 個ずつ出る確率は $\frac{27}{136}$ 、赤玉 2 個と黄玉 1 個が出る確率は $\frac{9}{68}$ である。赤玉、青玉、黄玉の個数をそれぞれ求めよ。

(慶應義塾志木高)

解

17 個の玉から 3 個の玉を取り出す取り出す場合の数は、「塾技 33」の組み合わせとなるので、

$${}_{17}C_3 = \frac{17 \times 16 \times 15}{3 \times 2 \times 1} = 680 \text{ (通り)}$$

赤玉、青玉、黄玉が 1 個ずつ出る確率は $\frac{27}{136}$ より、

$$\frac{27}{136} = \frac{135}{680}$$

と考えると、赤玉、青玉、黄玉を 1 個ずつ取り出す場合の数は、135 通りとわかる。よって、赤玉 x 個、青玉 y 個、黄玉 z 個とすると、

$$x \times y \times z = 135 \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様に、赤玉 2 個と黄玉 1 個が出る確率は $\frac{9}{68}$ より、

$$\frac{9}{68} = \frac{90}{680}$$

と考えると、赤玉 2 個、黄玉 1 個を取り出す場合の数は、90 通りとわかる。

$$\text{赤玉 2 個の取り出し方} = {}_xC_2 = \frac{x(x-1)}{2 \times 1}$$

よって、 $\frac{x(x-1)}{2} \times z = 90 \rightarrow x(x-1) \times z = 180 \quad \cdots \textcircled{2}$

また、赤玉、青玉、黄玉が合わせて 17 個より、 $x + y + z = 17 \quad \cdots \textcircled{3}$

①、②、③を同時に満たす、 x 、 y 、 z の値を考えればよい。

ここで x は 2 個以上 15 個以下であり、①より 135 の約数とわかるので、 $x = 3, 5, 9, 15$ のいずれかとなる。

(i) $x = 3$ のとき、

$$\textcircled{2} \text{ より、} 3(3-1) \times z = 180 \quad z = 30$$

(ii) $x = 5$ のとき、

$$\textcircled{2} \text{ より、} 5(5-1) \times z = 180 \quad z = 9$$

(iii) $x = 9$ のとき、

$$\textcircled{2} \text{ より、} 9(9-1) \times z = 180 \quad z = \frac{5}{2}$$

(iv) $x = 15$ のとき、

$$\textcircled{2} \text{ より、} 15(15-1) \times z = 180 \quad z = \frac{6}{7}$$

z は 1 個以上 15 個以下なので、 $z = 9$ ③より、 $y = 17 - 5 - 9 = 3$

答 赤玉 5 個、青玉 3 個、黄玉 9 個