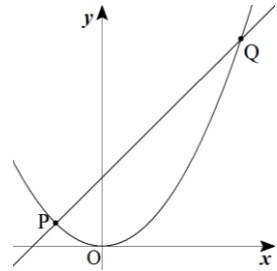


問題

原点を O とする。放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 3$ との交点を P , Q とする。ただし、点 P の x 座標よりも点 Q の x 座標の方が大きいとする。このとき、次の各問いに答えよ。



- (1) 点 P , 点 Q の座標をそれぞれ求めよ。
- (2) $\triangle OPQ$ の面積を求めよ。
- (3) $\triangle OPQ$ を x 軸のまわりには一回転させたときに $\triangle OPQ$ が通ったあとにできる立体の体積を求めよ。
- (4) $\triangle OPQ$ を y 軸のまわりには一回転させたときに $\triangle OPQ$ が通ったあとにできる立体の体積を求めよ。

(早稲田高等学院)

解

$$(1) \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{連立}} \begin{cases} x^2 = 2x + 3 \\ (x+1)(x-3) = 0 \end{cases}$$

$$x = -1, 3 \quad \text{答} \rightarrow P(-1, 1), Q(3, 9)$$

$$(2) \text{「塾技 17 (2)」より, } \triangle OPQ = 3 \times \{3 - (-1)\} \times \frac{1}{2} = 6 \quad \text{答}$$

(3) 右の図のように、 $\triangle OPQ$ を x 軸対称に移動した図形を $\triangle OP'Q'$ とし、点 R, S をとると、

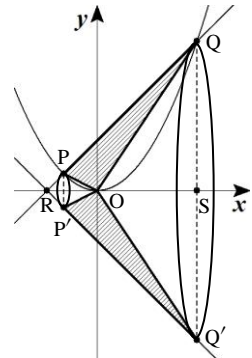
$$R(-\frac{3}{2}, 0), S(3, 0), P'(-1, -1), Q'(-3, -9)$$

求める $\triangle OPQ$ の回転体の体積は、「塾技 29」補足より、
 $\triangle QRS$ の回転体 $- \triangle PRO$ の回転体 $- \triangle QOS$ の回転体

$$= 9 \times 9 \times \pi \times \{3 - (-\frac{3}{2})\} \times \frac{1}{3} - 1 \times 1 \times \pi \times \{0 - (-\frac{3}{2})\} \times \frac{1}{3} - 9 \times 9 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{243}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi - 81\pi$$

$$= 40\pi \quad \text{答}$$



(4) 右の図のように、 $\triangle OPQ$ を y 軸対称に移動した図形を $\triangle OP'Q'$ とし、点 R, Q', P', S, S' をとる。 R は直線 PQ の y 切片 $= 3$ より、 $R(0, 3)$ 。また $Q'(-3, 9), P'(1, 1)$ S は直線 $PQ (y = 2x + 3)$ と直線 $OQ' (y = -3x)$ との交点の座標より、2 直線を連立させ、 $S(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}), S'(\frac{3}{5}, \frac{9}{5})$ と求まる。
 求める $\triangle OPQ$ の回転体の体積は、「塾技 29」補足より、

$$\triangle OP'R \text{ の回転体} + \triangle OQR \text{ の回転体} - \triangle OS'R \text{ の回転体}$$

(重なり分)

$$= 1 \times 1 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3} + 3 \times 3 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3}$$

$$= \pi + 9\pi - \frac{9}{25}\pi$$

$$= \frac{241}{25}\pi \quad \text{答}$$

