

難 塾技 4 様々な比例の表現

問題 1

$y+2$ は $x-2$ に比例し、 $z-1$ は $y-1$ に反比例する。また、 $x=3$ のとき $y=0$ 、 $z=-2$ である。
 $z=4$ のときの x の値を求めなさい。

(法政第二高)

問題 2

z は $x+1$ に比例する量と $y-1$ に反比例する量との和であり、 $x=0$ 、 $y=-2$ のとき $z=1$ 、 $x=-3$ 、 $y=4$ のとき $z=-3$ である。 $x=1$ 、 $y=-5$ のとき、 z の値を求めよ。

(巣鴨高)

解 1

$y+2$ は $x-2$ に比例するので、比例定数を a とすると、「塾技 4 (4)」より、

$$y+2 = a(x-2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおける。①に、 $x=3$ 、 $y=0$ をそれぞれ代入し、

$$0+2 = a(3-2)$$

$$2 = a$$

よって①は、 $y+2 = 2(x-2) \quad \cdots \textcircled{2}$

一方、 $z-1$ は $y-1$ に反比例するので、比例定数を b とすると、「塾技 5 (2)」より、

$$(z-1)(y-1) = b \quad \cdots \textcircled{3}$$

とおける。③に $y=0$ 、 $z=-2$ を代入し、

$$(-2-1)(0-1) = b$$

$$3 = b$$

よって③は、 $(z-1)(y-1) = 3 \quad \cdots \textcircled{4}$

④に $z=4$ を代入して、

$$(4-1)(y-1) = 3$$

$$3(y-1) = 3$$

$$y-1 = 1 \quad y = 2 \quad \cdots \textcircled{5}$$

⑤を②に代入して、

$$2+2 = 2(x-2)$$

$$4 = 2(x-2)$$

$$x-2 = 2 \quad x = 4 \quad \text{答}$$

解 2

z は $x+1$ に比例する量と $y-1$ に反比例する量との和より、

$$z = a(x+1) + \frac{b}{y-1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

(a 、 b はそれぞれ比例定数)

とおける。①に、 $x=0$ 、 $y=-2$ 、 $z=1$ を代入して、

$$1 = a(0+1) + \frac{b}{-2-1}$$

$$1 = a - \frac{b}{3} \quad \cdots \textcircled{2}$$

同様に①に $x=-3$ 、 $y=4$ 、 $z=-3$ を代入して、

$$-3 = a(-3+1) + \frac{b}{4-1}$$

$$-3 = -2a + \frac{b}{3} \quad \cdots \textcircled{3}$$

②と③を連立して、 $a=2$ 、 $b=3$

これらを①に代入して、

$$z = 2(x+1) + \frac{3}{y-1} \quad \cdots \textcircled{4}$$

④に、 $x=1$ 、 $y=-5$ を代入して、

$$z = 2(1+1) + \frac{3}{-5-1} = \frac{7}{2} \quad \text{答}$$