

## 塾技 98 整数問題 (2)

### 問題 1 (難易度 A~B)

$n$  を自然数,  $p, q (p > q)$  を素数とする。

$$(n+p)(n+q) = 77$$

を満たす  $n, p, q$  の値をそれぞれ求めなさい。

(都立青山高)

### 問題 2 (難易度 A~B)

等式  $x^2 - 9y^2 = 133$  を満たす自然数  $x, y$  の組をすべて求めよ。

(立教新座高)

### 問題 3 (難易度 B)

$xy - 2x + y - 8 = 0$  を満たす自然数の組  $(x, y)$  は全部で何組ありますか。

(日本大習志野高)

#### 解 1

$77 = 7 \times 11, p > q$  より,

$$n+p = 11 \quad \cdots \textcircled{1} \quad n+q = 7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

を同時に満たす  $n, p, q$  の値を求めればよい。「塾技 98 解法 1」より,  $n=1, n=2$  と順に

1 つずつ代入していき,  $p, q$  は素数かつ①, ②を満たす値を考えると,

①を満たす  $n, p$  の組は,  $(n, p) = (4, 7) (6, 5) (8, 3) (9, 2)$

②を満たす  $n, q$  の組は,  $(n, q) = (2, 5) (4, 3) (5, 2)$

よって, ①, ②を同時に満たす  $n, p, q$  の値は,  $n=4, p=7, q=3$  答

#### 解 2

「塾技 98 解法 2」の因数分解を利用する。

$$x^2 - 9y^2 = 133 \xrightarrow{\text{左辺を因数分解}} (x+3y)(x-3y) = 133$$

$x, y$  は自然数より,  $x+3y \geq 4$  かつ  $x+3y > x-3y$  が成り立つ。

$133 = 1 \times 133$  又は  $133 = 7 \times 19$  となるので, 積が 133 となるのは,

$$(i) \begin{cases} x+3y=133 \\ x-3y=1 \end{cases} \quad \text{又は} \quad (ii) \begin{cases} x+3y=19 \\ x-3y=7 \end{cases} \quad \text{の 2 通りの場合が考えられる。}$$

(i) より,  $x=67, y=22$     (ii) より,  $x=13, y=2$  答  $(x, y) = (13, 2) (67, 22)$

#### 解 3

「塾技 98 解法 2」の因数分解を利用する。

$$\begin{aligned} xy - 2x + y - 8 = 0 \\ x(y-2) + (y-2) - 6 = 0 & \quad \left. \begin{array}{l} \text{共通因数 } y-2 \text{ を} \\ \text{作り出す} \end{array} \right\} \\ x(y-2) + (y-2) = 6 \\ (y-2)(x+1) = 6 & \quad \left. \begin{array}{l} y-2 \text{ をくくり出す} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$x$  は自然数より,  $x+1 \geq 2$  となることを考え  
積が 6 となる  $x+1, y-2$  の組を求めると,

$$(x+1, y-2) = (2, 3) (3, 2) (6, 1)$$

よって,  $(x, y) = (1, 5) (2, 4) (5, 3)$

答 3 組