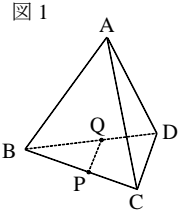


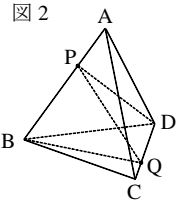
塾技 93 動点

問題 (難易度 A~B)

右の図1に示した立体A-BCDは、1辺の長さが6cmの正四面体である。点Pは、頂点Cを出発し、辺CB、辺BA上を毎秒1cmの速さで動き、12秒後に頂点Aに到着する。点Qは、点Pが頂点Cを出発するのと同じ時に頂点Bを出発し、辺BD、辺DC上を、点Pと同じ速さで動き、12秒後に頂点Cに到達する。点Pと点Qを結ぶ。次の各問いに答えよ。



- (1) 図1において、点Pが辺CB上にあるとき、辺CBと線分PQが垂直になるのは、点Pが頂点Cを出発してから何秒後か。
- (2) 右の図2は、図1において、点Pが頂点Cを出発してから10秒後のとき、頂点Bと点Q、頂点Dと点Pをそれぞれ結んだ場合を表している。立体P-BQDの体積は、立体A-BCDの体積の何分のいくつか。



(東京都共通問題)

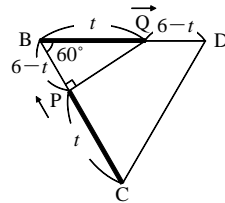
解

- (1) 点Pおよび点Qは、毎秒1cmの速さで動くので、 t 秒間では t cm動く。

点PがCB上のあるときの t の変域は、 $0 \leq t \leq 6$ 「塾技93(2)」より、辺CBと線分PQが垂直になるときの線分の長さを t を用いて表すと、右の図のようになる。 $\triangle BPQ$ は、 30° 、 60° 、 90° の直角三角形となるので、 $BQ = 2BP$ より、

$$t = 2(6-t) \quad \text{これを解いて、} t = 4 \text{ 秒後} \quad \boxed{\text{答}}$$

($0 \leq t \leq 6$ を満たす)



- (2) 10秒後、点Pおよび点Qはそれぞれ10cm進むので、 $BP = 4$ cm、 $DQ = 2$ cmとわかる。〈図I〉で「塾技61 1」より、 $\triangle BQD$ は $\triangle BCD$ の $\frac{4}{4+2} = \frac{2}{3}$ (倍)となる。一方、〈図II〉のように点Pおよび点Aから底面に下ろした垂線の足をそれぞれR、Sとすると、 $\triangle BPR \sim \triangle BAS$ より、

$$PR : AS = BP : BA = 4 : 6 = 2 : 3$$

よって、立体P-BQDの高さPRは、立体A-BCDの高さASの $\frac{2}{3}$ 倍となる。

以上より、立体P-BQDは、底面積も高さもともに立体A-BCDの $\frac{2}{3}$ となるので、立体P-BQDの体積は、立体A-BCDの体積の $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ $\boxed{\text{答}}$

