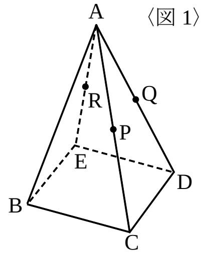
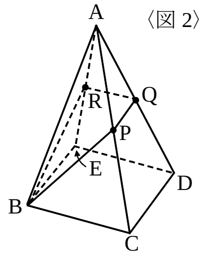
塾技 85　立体の切断（3）

問題（難易度 B）

右の図 1 に示した立体 A−BCDE は，底面 BCDE が正方形で，AB = AC = AD = AE = 12cm の正四角錐である。辺 AC，辺 AD，辺 AE 上にある点をそれぞれ，P，Q，R とする。次の各問に答えよ。



〈図 1〉



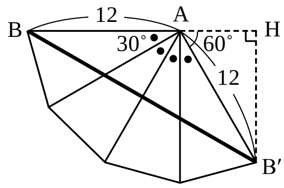
〈図 2〉

（1）右の図 2 は，図 1 において，点 B と点 P，点 P と点 Q，点 Q と点 R，点 R と点 B を結んだ場合を表している。側面の二等辺三角形の頂角を 30°，BP + PQ + QR + RB = $l$cm とする。l の長さがもっとも短くなるとき，l の長さは何 cm か。

（2）図 1 において，点 P と点 Q，点 Q と点 R，点 R と点 P をそれぞれ結んだ場合を考える。BC = 8cm, AP = AQ = AR = 6cm のとき，立体 A−PQR の体積は何 cm³ か。　　（都立八王子東高）

解

（1）「塾技 78」より，側面部分の展開図をかき直線にすればよい。右の図のように各点をとる。△AB′H は，30°，60°，90° の直角三角形となるので，



$$AH = \frac{1}{2}AB' = 6,\quad B'H = \sqrt{3}AH = 6\sqrt{3}$$

△BB′H に三平方の定理を用いて，

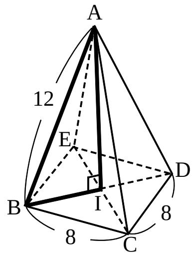
$$l = BB' = \sqrt{BH^2 + B'H^2} = \sqrt{18^2 + (6\sqrt{3})^2} = \mathbf{12\sqrt{3}(cm)}$$ 答

（2）右の図 I のように，A から底面に垂線 AI を下ろす。

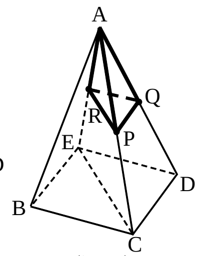
$$BD = \sqrt{2}BC = 8\sqrt{2}\ より，\ BI = 4\sqrt{2}$$

△ABI に三平方の定理を用いて，

$$AI = \sqrt{12^2 - (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{7}$$



〈図 I〉



〈図 II〉

求める立体 A−PQR は，三角錐 A−CDE を切断した立体と考えることができるので，図 II において「塾技 85」より，

$$[立体A-PQR] = [立体A-CDE] \times \frac{AP}{AC} \times \frac{AQ}{AD} \times \frac{AR}{AE}$$

$$= \underbrace{8 \times 8 \times 4\sqrt{7} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}_{三角錐\ A-CDE} \times \frac{6}{12} \times \frac{6}{12} \times \frac{6}{12}$$

$$= \mathbf{\frac{16\sqrt{7}}{3}(cm^3)}$$ 答